SUPERMATEMATYK KLASA II - PÓŁFINAŁ– 120 minut 16.02.2019

Część 1 - Zadania jednokotnej odpowiedzi – 10 punktów

Zad 1. Ile rozwiązań naturalnych ma równanie $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$?

A. 5 B. 6 C. 4 D. 2

Zad 2. Ile jest liczb między 1 i 1997 dzielących się przez 5 lub przez 7?

A. 625 B. 684 C. 627 D. 651

Zad 3. Ostatnia cyfra liczby $2^{100}+3^{100}+5^{100}$, to:

A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Zad 4. Liczbą odwrotną do liczby $1+\frac{1}{1+\frac{1}{8}}$ jest:

A. $-1\frac{8}{9}$ B. $\frac{8}{17}$ C. $1\frac{8}{9}$ D. $\frac{9}{17}$

Zad 5. Równanie $x^2-(m+2)x+m+3=0$, ma dokładnie dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że $\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}>\frac{1}{(m+3)^2}$ dla:

A. $m\epsilon(-\infty;-2\sqrt{2})$ B. $m\epsilon(-\infty;-3)\cup(2\sqrt{2};\infty)$ C. $m\geq -1$ D. $m\epsilon(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$

Zad 6. Wyrażenie $(-1\cdot 3^{10}+3^{10}:2)\cdot\frac{1}{3^8}$ wynosi:

A. $\frac{-3^{18}}{2}$ B. 4,5 C. $-4{,}5$ D. 1

Zad 7. W ilu punktach przecinają się wykresy funkcji $y=|x+1|\ i\ y=-|x|+1$?

A. 1 B. *nieskończenie wiele* C. 2 D. *zero*

Zad 8. Liczba rozwiązań równania $1+\frac{x}{x+2}=\frac{2x^2}{x^2-4}$ wynosi:

A. 1 B. nieskończenie wiele C. 2 D. zero

Zad 9. Dla jakich wartości a równanie $|x+1|+|x|=a$ nie ma rozwiązania?

A. $a<1$ B. $a\leq 1$ C. $a=1$ D. $a>-1$

Zad 10. Jeżeli liczby x, y, z są rozwiązaniami równań: $yz=-6, zx=2, xy=-3$ to wyrażenie $x+y+z$ *wynosi*:

A. 1 B. 2 C. -1 D. 0

Część 2 — zadania wielokrotnego wyboru - 30 punktów

WSZYSTKIE ODPOWIEDZI MOGĄ BYĆ POPRAWNE!

Zad 11. Rozwiązaniem równania: $x=\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\cdots}}}$ jest liczba:

A. *naturalna* B. *pierwsza* C. *niewymierna*

Zad 12. Cyfra jedności liczby 2004^{2003}

A. *jest liczbą naturalną* B. *jest liczbą złożoną* C. wynosi 4

Zad 13. Układ równań $\begin{cases}(p-1)x=1\\ p(x-1)=1-p\end{cases}$

A. *dla* $p\neq 0$ *i* $p\neq 1$ *ma dokładnie* 1 *rozwiązanie*

B. *dla dowolnego* p *jest układem nieoznaczonym*

C. *nie ma rozwiązań*

Zad 14. Dwie liczby są wzajemnie odwrotne. Jedna z nich jest szesnakrotnością drugiej. Liczby te to:

A. $4\ i\ \frac{1}{4}$ B. $16\ i\ \frac{1}{16}$ C. $-4\ i -\frac{1}{4}$

Zad 15. W trójkącie poprowadzono odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta, wtedy:

A. *długość tego odcinka jest równa połowie długości trzeciego boku trójkąta*

B. *odcinek ten jest równoległy do trzeciego boku trójkąta*

C. *odcinek ten jest środkową jednego z boków trójkąta*

Zad 16. Dwa równe kwadraty są nałożone jeden na drugi tak, że mają wspólny środek. Jeden z nich otrzymaliśmy poprzez obrót dookoła ich wspólnego środka o kąt $45°$. Część wspólna kwadratów, to:

A. *czworokąt* B. *sześciokąt* C. *ośmiokąt*

Zad 17. Oba boki prostokąta zmniejszono o 20%. O Ile procent zmiejszyło się pole tego prostokąta?

A. 20% B. 36% C. 64%

Zad 18. Obwód prostokąta wynosi $112\ cm$. Dwusieczna jednego z jego kątów wewnętrznych dzieli dłuższy bok w stosunku 2:3. Jest to prostokąt o bokach:

A. $35\ cm\ i\ 21\ cm$ B. $30\ cm\ i\ 26\ cm$ C. $16\ cm\ i\ 40\ cm$

Zad 19. Dla funkcji $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$:

A. $f(2) = -\frac{13}{32}$ B. $f(1) = \frac{1}{4}$ C. $f(4) = -\frac{253}{128}$

Zad 20. Liczba $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ jest liczbą:

A. *niewymierną* B. *pierwszą* C. *nieparzystą*

Zad 21. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona są równe i wynoszą 10 cm. Przedłużenia ramion tego trapezu przecinają się pod kątem prostym. Wtedy pole trapezu wynosi:

A. $50 + 50\sqrt{2}$ B. $-50 + 50\sqrt{2}$ C. $\frac{(10+5\sqrt{2})^2}{2} - \frac{(5\sqrt{2})^2}{2}$

Zad 22. Zbiór wartości funkcji $f(x) = \max(3, |x|)$, to:

A. $Y =< 0; \infty)$ B. $Y =< 3; \infty)$ C. $Y = \{3\}$

Zad 23. Do dziedziny fukcji $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{-x+6}} + \sqrt{x-1}$ nie należy:

A. 1 B. 7 C. -6

Zad 24. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P, wtedy:

A. $\sphericalangle\ APB\ jest\ rozwarty$ B. $|\sphericalangle\ BAP| + |\sphericalangle\ ABP| < 90°$ C. $\sphericalangle\ BAP\ jest\ ostry$

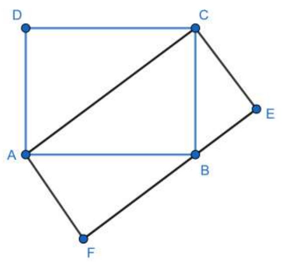
Zad 25. Dla liczb *a* i *b* określmy operacje $\triangle$ i $\boxplus$: $a \triangle b = a + b - 2$, $a \boxplus b = 3a + 4b$, wtedy:

A. $13 \triangle 40 = 52$ B. $(16 \triangle 25) \boxplus (-40) = 43$ C. $(16 \boxplus 25) \triangle (-40) = 101$

Część 3 - Zadania otwarte -10 punktów

Zad 26. Czy liczba $x = 2009 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2009^2}\right)$ jest liczbą pierwszą? Uzasadnij odpowiedź.

Zad 27. Czworokąty $ABCD\ i\ ACEF$ są prostokątami, przy czym wiadomo, że punkt B należy do odcinka EF. Wiadomo, że $|AD| = 3\ i\ |AB| = 4$. Oblicz, w jakiej proporcji pozostają pola trójkątów $CEB\ i\ ABC\ oraz\ BFA\ i\ ABC$.



POWODZENIA!!!